

DOI: 10.7652/xjtuxb201607010

粗糙表面弹塑性接触连续光滑指数函数模型与 法向接触刚度研究

陈永会, 张学良, 温淑花, 兰国生, 王余松, 范世荣

(太原科技大学机械工程学院, 030024, 太原)

摘要: 针对微凸体在完全弹性、弹塑性和完全塑性变形阶段接触载荷和接触面积的不连续、跳跃和不光滑, 以及平均接触压力的不单调问题, 提出了一种新颖的近似指数形式的解析模型。在此基础上, 利用分形理论进一步建立了粗糙表面在三阶段接触时的法向接触刚度和法向接触载荷与真实接触面积之间的解析模型, 并进行了无量纲化处理。仿真分析了分形维数 D 、塑性指数 Φ 以及无量纲分形粗糙度参数 G^* 对无量纲法向接触刚度 K_n^* 和无量纲法向接触载荷 F_n^* 的影响规律, 并分析了 K_n^* 随 F_n^* 的变化规律。模型的仿真结果表明: K_n^* 和 F_n^* 都随着无量纲真实接触面积 A_r^* 的增大而增大; 随 Φ 的增大或 G^* 的减小, K_n^* 和 F_n^* 的增速都变大; F_n^* 的增速随 D 的变化是先减小后增大, 而 K_n^* 的增速是指数增大; K_n^* 随 F_n^* 的增大而增大, 在 D 从 1.1 到 1.9 的变化过程中, K_n^* 随 F_n^* 的增速是先增大后减小, 在 $D > 1.51$ 时, 随着 G^* 的减小, K_n^* 随 F_n^* 的增速明显变大。利用法向接触刚度模型计算了哑铃模型的固有频率, 计算结果与实验结果比较一致, 验证了模型的准确性。

关键词: 无量纲法向接触刚度; 无量纲法向接触载荷; 弹塑性接触模型; 分形模型; 指数模型

中图分类号: TH113.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2016)07-0058-10

Research on Continuous Smooth Exponential Model of Elastic-Plastic Contact and Normal Contact Stiffness of Rough Surface

CHEN Yonghui, ZHANG Xueliang, WEN Shuhua, LAN Guosheng,
WANG Yusong, FAN Shirong

(College of Mechanical Engineering, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, China)

Abstract: A novel approximate exponential analytical model of asperity elastic-plastic contact is developed. The proposed model can solve the problem of discontinuous, leap and unsmooth contact load and contact area in three separated phases, i. e. perfectly elastic phase, elastic-plastic phase and fully plastic phase, and can also deal with the problem of non-monotone of average contact pressure in the elastic-plastic phase. The analytical model between the contact stiffness or contact pressure of rough surface and the real contact area in the three phases is further established by the fractal theory. The dimensionless normal contact stiffness K_n^* and dimensionless normal contact load F_n^* are obtained. The influences of fractal dimension D , plastic index Φ and dimensionless fractal roughness parameter G^* on K_n^* or F_n^* are simulated and analyzed, and the change of K_n^* with F_n^* is also simulated and analyzed. The results show that

收稿日期: 2016-01-19。 作者简介: 陈永会(1975—),男,副教授;张学良(通信作者),男,教授,博士生导师。 基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51275328)。

网络出版时间: 2016-04-28

网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20160428.2222.002.html>

K_n^* and F_n^* increase with increasing dimensionless real contact area A_r^* ; the increasing rate of K_n^* and F_n^* are enhanced with the increase of Φ or decrease of G^* . The increasing rate of F_n^* decreases first and then increases with D , while the increasing rate of K_n^* shows an exponential increase. K_n^* increases with F_n^* . When D changes from 1.1 to 1.9, the increasing rate of K_n^* increases first and then decreases with F_n^* . When $D > 1.51$, the value of K_n^*/F_n^* obviously increases with the decrease of G^* . The natural frequencies of the dumbbell model are calculated by the normal contact stiffness model and compared with the experimental one, verifying the accuracy of the proposed model.

Keywords: dimensionless normal contact stiffness; dimensionless normal contact load; elastic-plastic contact model; fractal mode; exponential model

工程中的任何接触表面都不是绝对光滑而是粗糙的,它们之间的接触行为往往存在着复杂的多尺度、非线性以及多物理场的特性。对于粗糙表面接触模型的研究,从最早的赫兹接触理论,到后来 Greenwood 和 Williamson 进行多方面的假设、利用统计学方法建立的粗糙表面弹性接触模型(即 GW 模型),以及其他学者建立的适用于极大载荷下的粗糙表面塑性接触模型^[1-2],均忽略了弹性变形和塑性变形之间的弹塑性变形区间。针对早期接触模型的缺陷和不足,Chang 等利用体积守恒原理建立了粗糙表面弹塑性接触模型,即 CEB 模型^[3]。Zhao 等对 CEB 模型进行了修正,提出了 3 种变形状态的 ZMC 模型^[4]。Kogut 和 Etsion 利用有限元方法研究了半球体与刚性平面接触时接触载荷、接触面积以及平均接触压力与变形量之间的关系,而且通过曲线拟合得到了分段经验公式,即 KE 模型^[5-6]。ZMC 模型和 KE 模型由于没有考虑临界点处的连续性,因此平均接触压力与变形量之间的关系在临界点都出现了跳跃和不光滑现象。赵永武等采用三次样条函数对 ZMC 模型进行改进,满足了在临界点连续性和光滑性的要求^[7]。此外,Brake 采用 Hermit 多项式插值,也满足了曲线的光滑性和连续性^[8]。但是,不管是样条函数还是 Hermit 多项式的插值函数,都使得粗糙表面弹塑性阶段的平均接触压力与变形量之间的关系曲线出现了振荡现象,使得接触状态的变化过程呈现非单调性。徐超等采用低阶椭圆曲线插值方法进行了弹塑性阶段建模,只拟合了平均接触压力与变形量之间的关系,并利用概率统计方法建立了粗糙表面法向弹塑性接触模型^[9],但是弹塑性变形阶段的实际接触面积与变形量之间的关系仍采用了 Hermit 插值法所给出的关系式,这使得接触参数之间不能很好地匹配。张学良等利用分形理论和 KE 模型(弹塑性阶段的分段

经验公式)推导了粗糙表面三阶段的接触刚度和接触载荷之间的关系,并通过实验验证了模型的正确性^[10]。然而如上所述,KE 模型存在临界点不连续和跳跃的特点。

针对上述不足,通过观察和分析微凸体在弹性阶段和塑性阶段的接触参数与变形量的关系,本文利用一阶系统阶跃响应函数建立了微凸体弹塑性变形阶段平均接触压力与变形量之间的模型,推导了相关参数,实现了接触参数随变形量的单调、连续、光滑和无跳跃的变化,并与典型模型进行了对比分析,验证了本文模型的可信性。另外,还利用分形理论得到了粗糙表面在弹性阶段、弹塑性阶段和塑性阶段接触时的法向接触刚度和法向接触载荷解析模型,并进行了无量纲化处理,仿真分析了分形维数、塑性指数和无量纲分形粗糙度参数对无量纲法向接触刚度和无量纲法向接触载荷的影响规律,进而分析了无量纲法向接触刚度随无量纲法向接触载荷的变化规律。

1 微凸体弹塑性模型的建立

本模型的建立依然沿用文献[11]中 GW 模型的假设,这样微凸体的完全弹性阶段与完全塑性阶段的接触参数符合文献[12]中的描述。

完全弹性变形阶段(即 $\delta < \delta_c$ 时)的接触载荷 F_e 、接触面积 A_e 以及平均接触压力 P_e 与接触变形量 δ 之间的关系分别为

$$F_e = \frac{4}{3}ER^{1/2}\delta^{3/2} \tag{1}$$

$$A_e = \pi R\delta \tag{2}$$

$$P_e = \frac{2}{3}KH\left(\frac{\delta}{\delta_c}\right)^{1/2} \tag{3}$$

式中: E 为复合弹性模量(微凸体与一刚性平面接触), $E = E_1/(1 - \mu^2)$, μ 为泊松比; $K = 0.454 +$

0.41μ ; $\delta_c = \left(\frac{\pi KH}{2E}\right)^2 R$ 为临界接触变形量; H 为硬度。

完全塑性变形阶段(即 $\delta > 110\delta_c$ 时)的接触载荷 F_p 、接触面积 A_p 以及平均接触压力 P_p 与接触变形量 δ 之间的关系分别为

$$F_p = 2\pi R\delta H \tag{4}$$

$$A_p = 2\pi R\delta \tag{5}$$

$$P_p = H \tag{6}$$

弹塑性变形阶段(即 $\delta_c \leq \delta \leq 110\delta_c$ 时)既存在弹性变形区域,又存在塑性变形区域,是两者的混合。在变形量接近 δ_c 时,弹性变形区域较大,起主要作用;在变形量接近 $110\delta_c$ 时,塑性变形区域较大,起主要作用。因而,在弹塑性变形阶段接触参数与变形量的关系是由弹性和塑性的混合所决定的,而且以连续介质力学理论来考虑,弹塑性变形过程是连续的、光滑的和单调的^[9]。因此,为了保证这一特点,在 $\delta = \delta_c$ 和 $\delta = 110\delta_c$ 两点处,接触面积、接触载荷和平均接触压力与变形量之间的关系必须满足以下要求

$$\left. \begin{aligned} A_{ep}(\delta_c) &= A_e(\delta_c); & A'_{ep}(\delta_c) &= A'_e(\delta_c) \\ F_{ep}(\delta_c) &= F_e(\delta_c); & F'_{ep}(\delta_c) &= F'_e(\delta_c) \\ P_{ep}(\delta_c) &= P_e(\delta_c); & P'_{ep}(\delta_c) &= P'_e(\delta_c) \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

$$\left. \begin{aligned} A_{ep}(110\delta_c) &= A_e(110\delta_c); & A'_{ep}(110\delta_c) &= A'_e(110\delta_c) \\ F_{ep}(110\delta_c) &= F_e(110\delta_c); & F'_{ep}(110\delta_c) &= F'_e(110\delta_c) \\ P_{ep}(110\delta_c) &= P_e(110\delta_c); & P'_{ep}(110\delta_c) &= P'_e(110\delta_c) \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

式(7)、式(8)中: A'_p 、 F'_p 、 P'_p 、 A'_{ep} 、 F'_{ep} 、 P'_{ep} 分别为 A_p 、 F_p 、 P_p 、 A_{ep} 、 F_{ep} 、 P_{ep} 关于变形量 δ 的导数。

表 1 2 种模型的微凸体接触载荷对比

模型	参数	$\delta = \delta_c$		$\delta = 6\delta_c$		$\delta = 110\delta_c$	
		弹性	弹塑性一	弹塑性一	弹塑性二	弹塑性二	塑性
KE 模型	F/N	$2.569\ 0 \times 10^{-6}$	$2.646\ 0 \times 10^{-6}$	$3.399\ 9 \times 10^{-5}$	$3.456\ 9 \times 10^{-5}$	$1.362\ 0 \times 10^{-3}$	$1.469\ 3 \times 10^{-3}$
	$e/\%$	3.0	3.0	1.7	1.7	7.9	7.9
本文模型	F/N	$2.569\ 0 \times 10^{-6}$	$2.569\ 0 \times 10^{-6}$	连续	连续	$1.469\ 3 \times 10^{-3}$	$1.469\ 3 \times 10^{-3}$
	$e/\%$	0	0			0	0

文献[7](赵永武模型)和文献[8](Brake 模型)对 A_{ep} 和 F_{ep} 随变形量 δ 变化的不连续和不光滑进行了改进,但是,它们的平均接触压力 P_{ep} 随 δ 的变化不是单调的。图 1 表示了 KE 模型、赵永武模型、Brake 模型与本文模型在给定工程参数(表 1 采用的参数)时的平均接触压力仿真结果对比。文献[9]

采用分段拟合的 KE 模型在 $\delta = \delta_c$ 、 $\delta = 6\delta_c$ 和 $\delta = 110\delta_c$ 这 3 个点均出现不连续、不光滑的现象。表 1 列出了以钢(工程参数为 $E_1 = 200\text{ GPa}$, $H = 5\text{ GPa}$, $\mu = 0.3$, $K = 0.454 + 0.41\mu$, $R = 1\text{ }\mu\text{m}$, 且下面图 1 和图 2 均采用这些数据)为例时的 KE 模型与本文模型(见式(17))在上述 3 个点的接触载荷仿真数据对比。从表 1 中可以看出,KE 模型在 $\delta = 110\delta_c$ 时接触载荷的相对误差是最大的,达到了 7.9%,而本文模型在这 3 个点的相对误差均为 0%。

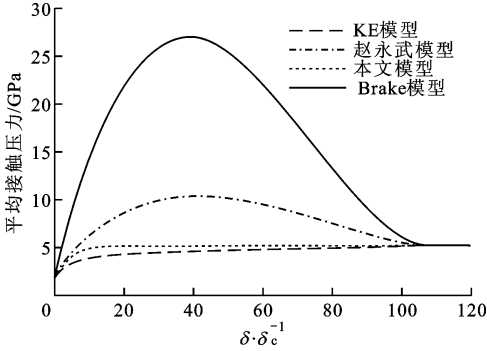


图 1 不同模型的平均接触压力对比

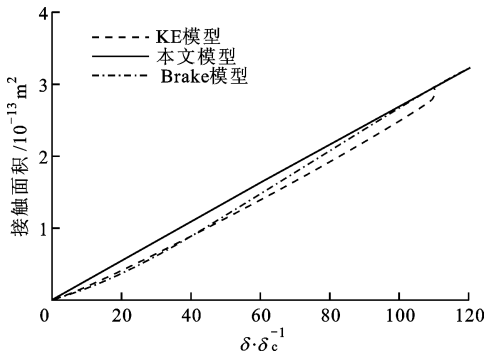


图 2 不同模型的接触面积对比

利用椭圆曲线来对弹塑性阶段平均接触压力的变化进行建模,得到了平均接触压力与变形量之间的关系,见文献[9]中的式(22)。但是,经过推导验证之后发现,其中有部分遗漏的错误。文献[9]式(21)中的椭圆长半轴 a 为

$$a = \left(\frac{2\omega_1(\omega_2 - \omega_1)(rk - k + 1)}{(2k - 2 - rk)k} \right)^{1/2} \quad (9)$$

而实际的椭圆长半轴应为

$$a = \left((\omega_2^2 - \omega_1^2) + \frac{2\omega_1(\omega_2 - \omega_1)(k^2 - rk^2 - 1)}{(2k - 2 - rk)k} \right)^{1/2} \quad (10)$$

式(9)与式(10)中符号的含义见文献[9]。此外,文献[9]中弹塑性变形阶段的实际接触面积 A_{ep} 与变形量 δ 之间的关系是采用文献[8]中的式(16)(利用 Hermit 插值法)给出的,并没有给出接触载荷 F_{ep} 与变形量 δ 的关系。

在考虑上述方法的不足之后,本文尝试采用一阶系统阶跃响应函数的形式对微凸体弹塑性阶段平均接触压力 P_{ep} 随变形量 δ 的变化进行建模。为了保证 P_{ep} 在 $\delta = \delta_c$ 和 $\delta = 110\delta_c$ 两个临界点的连续, P_{ep} 必须满足式(7)与式(8),由此得到以下条件

$$\left. \begin{aligned} P_{ep}(\delta_c) &= P_e(\delta_c) = \frac{2}{3}KH \\ P'_{ep}(\delta_c) &= P'_e(\delta_c) = \frac{KH}{3\delta_c} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} P_{ep}(110\delta_c) &= P_p(110\delta_c) = H \\ P'_{ep}(110\delta_c) &= P'_p(110\delta_c) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

因此,根据一阶系统阶跃响应的模式,并考虑两个临界点的特点,设定当 δ 在 δ_c 和 $110\delta_c$ 之间时, P_{ep} 与 δ 之间的关系为

$$P_{ep}(\delta) = \frac{2}{3}KH + \left(H - \frac{2}{3}KH \right) \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{T} \left(\frac{\delta - \delta_c}{110\delta_c - \delta_c} \right) \right) \right] \quad (13)$$

由于要满足式(11),因此可知

$$P'_{ep}(\delta_c) = \left(H - \frac{2}{3}KH \right) \frac{1}{109T\delta_c} = \frac{KH}{3\delta_c} = P'_e(\delta_c)$$

可得

$$\frac{1}{T} = \frac{109K}{3 - 2K} \quad (14)$$

将式(14)代入式(13)中,可得

$$P_{ep}(\delta) = \frac{2}{3}KH + \left(H - \frac{2}{3}KH \right) f(\delta) \quad (15)$$

式中: $f(\delta) = 1 - \exp\left(-\frac{109K}{3 - 2k} \left(\frac{\delta - \delta_c}{110\delta_c - \delta_c} \right) \right)$ 。可以验证,当 $\delta = \delta_c$ 和 $\delta = 110\delta_c$ 时,此模型同样满足式(12)中的所有情况。同时,此模型是单调的,见图1。

本可以用同样的方法,得到微凸体弹塑性阶段接触面积 A_{ep} 和接触载荷 F_{ep} 与变形量 δ 之间的关系,但是考虑到接触面积和接触载荷在后续推导模型过程中需要进行积分运算,而指数函数与幂函数

的乘积不容易积分,无法得到解析模型,因此将 $f(\delta)$ 进行泰勒级数展开,略去高阶项并且进行简化处理,得到微凸体弹塑性阶段的 $F_{ep}(\delta)$ 和 $A_{ep}(\delta)$

$$F_{ep}(\delta) = \frac{4}{3}ER^{1/2}\delta^{3/2} + \left(2\pi R\delta H - \frac{4}{3}ER^{1/2}\delta^{3/2} \right) \cdot \left[\frac{2(\delta - \delta_c)}{110\delta_c - \delta_c} - \left(\frac{\delta - \delta_c}{110\delta_c - \delta_c} \right)^2 \right] \quad (16)$$

$$A_{ep}(\delta) = \frac{F_{ep}(\delta)}{P_{ep}(\delta)} \quad (17)$$

通过表1和图2可以验证,在 $\delta = \delta_c$ 和 $\delta = 110\delta_c$ 两个临界点,接触载荷和接触面积与变形量之间的关系是连续的、光滑的和单调的。

2 粗糙表面弹塑性接触模型的建立

根据文献[13],实际粗糙表面微接触点的面积分布密度函数为

$$n(a) = \frac{D}{2} a_1^{D/2} a^{-(D/2+1)}, \quad 0 < a \leq a_1 \quad (18)$$

式中: a_1 为最大微接触点的面积; D 为粗糙表面的分形维数。

由文献[14-15]可知,粗糙表面微凸体的变形量 δ 和曲率半径 R 分别为

$$\delta = 2^{3-D} \pi^{(D-2)/2} G^{D-1} (\ln \beta)^{1/2} a^{(2-D)/2} = g_1(D) a^{(2-D)/2} \quad (19)$$

式中: $g_1(D) = 2^{3-D} \pi^{(D-2)/2} G^{D-1} (\ln \beta)^{1/2}$; G 为粗糙表面的分形粗糙度参数; β 为常数,通常 $\beta = 1.5$ 。

$$R = \frac{a^{D/2}}{2^{4-D} \pi^{D/2} G^{D-1} (\ln \beta)^{1/2}} = \frac{a^{D/2}}{2\pi g_1(D)} \quad (20)$$

当 $\delta = \delta_c$ 时, $a = a_c$ 。将式(19)和式(20)代入 $\delta_c = \left(\frac{\pi KH}{2E} \right)^2 R$ 中,可得临界接触面积

$$a_c = \left[2^{9-2D} \pi^{D-3} G^{2D-2} \ln \beta \left(\frac{E}{KH} \right)^2 \right]^{1/(D-1)} \quad (21)$$

将式(19)和式(20)代入式(1)中,微凸体在弹性变形阶段的接触载荷 $F_e(a)$ 可以写成

$$F_e(a) = \frac{4E}{3 \times (2\pi)^{1/2}} g_1(D) a^{(3-D)/2} \quad (22)$$

由式(22)和式(19),可得在弹性变形阶段微凸体的法向接触刚度

$$k_{ne}(a) = \frac{dF_e(a)}{da} \frac{da}{d\delta} = \frac{4E(3-D)}{3 \times (2\pi)^{1/2} (2-D)} a^{1/2} \quad (23)$$

将式(19)和式(20)代入式(17)中,微凸体在弹塑性变形阶段的接触载荷

$$F_{ep}(a) = \frac{4E}{3 \times (2\pi)^{1/2}} g_1(D) a^{(3-D)/2} +$$

$$\left(aH - \frac{4E}{3 \times (2\pi)^{1/2}} g_1(D) a^{(3-D)/2}\right) \cdot \left[\frac{2}{109} \left(\frac{a^{(2-D)/2}}{a_c^{(2-D)/2}} - 1\right) - \frac{1}{109^2} \left(\frac{a^{(2-D)/2}}{a_c^{(2-D)/2}} - 1\right)^2\right] \quad (24)$$

由式(19)和式(24),可以得到微凸体在弹塑性接触阶段的法向接触刚度

$$k_{\text{nep}}(a) = \frac{4E(3-D)}{3 \times (2\pi)^{1/2} (2-D)} a^{1/2} + \left[\frac{2H}{(2-D)g_1(D)} a^{D/2} - \frac{4E(3-D)}{3 \times (2\pi)^{1/2} (2-D)} a^{1/2}\right] \cdot \left[\frac{2}{109} \left(\frac{a^{(2-D)/2}}{a_c^{(2-D)/2}} - 1\right) - \frac{1}{109^2} \left(\frac{a^{(2-D)/2}}{a_c^{(2-D)/2}} - 1\right)^2\right] + \left[\frac{2H}{(2-D)g_1(D)} a^{1+D/2} - \frac{8E}{3 \times (2\pi)^{1/2} (2-D)} a^{3/2}\right] \cdot \left[\frac{(2-D)a^{-D/2}}{109a_c^{(2-D)/2}} - \frac{(2-D)a^{-D/2}}{109^2 a_c^{(2-D)/2}} \left(\frac{a^{(2-D)/2}}{a_c^{(2-D)/2}} - 1\right)\right] \quad (25)$$

微凸体只有在完全弹性阶段和弹塑性阶段才存在法向接触刚度,而完全塑性阶段不存在法向接触刚度。

同理,可得微凸体在弹塑性阶段的接触面积 $A_{\text{ep}}(a)$ 和平均接触压力 $P_{\text{ep}}(a)$ 分别为

$$A_{\text{ep}}(a) = \frac{a}{2} \left[1 + \frac{2}{109} \left(\frac{a^{(2-D)/2}}{a_c^{(2-D)/2}} - 1\right) - \frac{1}{109^2} \left(\frac{a^{(2-D)/2}}{a_c^{(2-D)/2}} - 1\right)^2\right]$$

$$P_{\text{ep}}(a) = \frac{2KH}{3} + \left(H - \frac{2KH}{3}\right) \cdot \left[\frac{2}{109} \left(\frac{a^{(2-D)/2}}{a_c^{(2-D)/2}} - 1\right) - \frac{1}{109^2} \left(\frac{a^{(2-D)/2}}{a_c^{(2-D)/2}} - 1\right)^2\right]$$

粗糙表面的真实接触面积

$$A_r = \int_0^{a_1} a n(a) da = \frac{D}{2-D} a_1 \quad (26)$$

粗糙表面的法向接触刚度只存在于结合面接触变形处于弹性阶段和弹塑性阶段的微凸体上。因此,结合面的总法向接触刚度

$$K_n = \int_{a_c}^{a_1} k_{\text{ne}}(a) n(a) da + \int_{a_{\text{cl}}}^{a_c} k_{\text{nep}}(a) n(a) da \quad (27)$$

将式(23)、式(25)及式(18)代入式(27)中,可得

$$K_n = g_2(D) (a_1^{(1-D)/2} - a_c^{(1-D)/2}) + g_3(D) (a_c^{(1-D)/2} - a_{\text{cl}}^{(1-D)/2}) + g_4(D) (a_c^{(2-D)/2} - a_{\text{cl}}^{(2-D)/2}) + g_5(D) (\ln a_c - \ln a_{\text{cl}}) + g_6(D) (a_c^{2-D} - a_{\text{cl}}^{2-D}) + g_7(D) (a_c^{(3-2D)/2} - a_{\text{cl}}^{(3-2D)/2}) + g_8(D) (a_c^{(5-3D)/2} - a_{\text{cl}}^{(5-3D)/2}) \quad (28)$$

式中

$$a_{\text{cl}} = \left(\frac{1}{110}\right)^{1/(D-1)} a_c \text{ (见文献[10])}$$

$$g_2(D) = \frac{4ED(3-D)a_1^{D/2}}{3 \times (2\pi)^{1/2} (2-D)(1-D)}$$

$$g_3(D) = \frac{4ED(3-D)a_1^{D/2}}{3 \times (2\pi)^{1/2} (2-D)(1-D)} \left(1 + \frac{1}{109}\right)^2$$

$$g_4(D) = \frac{2(4-D)DH a_1^{D/2}}{109(2-D)^2 g_1(D) a_c^{(2-D)/2}} \frac{110}{109}$$

$$g_5(D) = -\frac{DHa_1^{D/2}}{109(2-D)g_1(D)} \frac{219}{109}$$

$$g_6(D) = -\frac{DH(3-D)a_1^{D/2}}{109^2(2-D)^2 g_1(D) a_c^{2-D}}$$

$$g_7(D) = -\frac{8 \times 110ED(5-2D)a_1^{D/2}}{3 \times 109^2 \times (2\pi)^{1/2} (2-D)(3-2D) a_c^{(2-D)/2}}$$

$$g_8(D) = -\frac{4ED(7-3D)a_1^{D/2}}{3 \times 109^2 \times (2\pi)^{1/2} (2-D)(5-3D) a_c^{2-D}}$$

结合面的法向接触总载荷存在于结合面接触变形处于弹性阶段、弹塑性阶段以及塑性阶段的微凸体上,因此,结合面的总法向接触载荷与真实接触面积的关系为

$$F_n = \int_{a_c}^{a_1} F_e(a) n(a) da + \int_{a_{\text{cl}}}^{a_c} F_{\text{ep}}(a) n(a) da + \int_0^{a_{\text{cl}}} F_p(a) n(a) da \quad (29)$$

将式(1)、式(4)、式(24)以及式(18)代入式(29)中,可得

$$F_n = \frac{4EDg_1(D)a_1^{D/2}}{3 \times (2\pi)^{1/2} (3-2D)} (a_1^{(3-2D)/2} - a_c^{(3-2D)/2}) + \frac{4EDg_1(D)a_1^{D/2}}{3 \times (2\pi)^{1/2} (3-2D)} \left(1 + \frac{1}{109}\right)^2 (a_c^{(3-2D)/2} - a_{\text{cl}}^{(3-2D)/2}) + \frac{DHa_1^{D/2}}{109(2-D)a_c^{(2-D)/2}} \left(1 + \frac{1}{109}\right) (a_c^{2-D} - a_{\text{cl}}^{2-D}) - \frac{DHa_1^{D/2}}{109(2-D)} \left(2 + \frac{1}{109}\right) (a_c^{(2-D)/2} - a_{\text{cl}}^{(2-D)/2}) - \frac{8EDg_1(D)a_1^{D/2}}{3 \times 109 \times (2\pi)^{1/2} (5-3D) a_c^{(2-D)/2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{109}\right) (a_c^{(5-3D)/2} - a_{\text{cl}}^{(5-3D)/2}) - \frac{DHa_1^{D/2}}{3 \times 109^2 (2-D) a_c^{2-D}} (a_c^{3(2-D)/2} - a_{\text{cl}}^{3(2-D)/2}) + \frac{4EDg_1(D)a_1^{D/2}}{3 \times 109^2 \times (2\pi)^{1/2} (7-4D) a_c^{2-D}} (a_c^{(7-4D)/2} - a_{\text{cl}}^{(7-4D)/2}) + \frac{DHa_1^{D/2}}{2-D} a_{\text{cl}}^{(2-D)/2} \quad (30)$$

将式(30)进行无量纲化处理,可得无量纲接触载荷

$$F_n^* = g_{F1}(D) (G^*)^{D-1} (A_r^*)^{D/2} \left[\left(\frac{2-D}{D}\right)^{(3-2D)/2} (A_r^*)^{(3-2D)/2} - (a_c^*)^{(3-2D)/2}\right] + (g_{F2}(D) - g_{F5}(D) +$$

$$g_{F7}(D))(G^*)^{D-1}(A_r^*)^{D/2}(a_c^*)^{(3-2D)/2} + (g_{F3}(D) - g_{F4}(D) + g_{F6}(D) + g_{F8}(D))\Phi(A_r^*)^{D/2}(a_c^*)^{(2-D)/2} \quad (31)$$

式中

$$\begin{aligned} g_{F1}(D) &= \frac{2^{5-D}\pi^{(D-2)/2}D^{(2-D)/2}(\ln\beta)^{1/2}}{3 \times (2\pi)^{1/2}(3-2D)(2-D)^{-D/2}} \\ g_{F2}(D) &= \frac{110^2 g_{F1}(D)}{109^2} \left[1 - \left(\frac{1}{110} \right)^{(3-2D)/2(D-1)} \right] \\ g_{F3}(D) &= \frac{110D^{(2-D)/2}}{109^2(2-D)^{(2-D)/2}} \left[1 - \left(\frac{1}{110} \right)^{(2-D)/(D-1)} \right] \\ g_{F4}(D) &= \frac{219D^{(2-D)/2}}{109^2(2-D)^{(2-D)/2}} \left[1 - \left(\frac{1}{110} \right)^{(2-D)/2(D-1)} \right] \\ g_{F5}(D) &= \frac{2 \times 110(3-2D)g_{F1}(D)}{109^2(5-3D)} \cdot \\ &\quad \left[1 - \left(\frac{1}{110} \right)^{(5-3D)/2(D-1)} \right] \\ g_{F6}(D) &= \frac{D^{(2-D)/2}}{3 \times 109^2(2-D)^{(2-D)/2}} \cdot \\ &\quad \left[1 - \left(\frac{1}{110} \right)^{3(2-D)/2(D-1)} \right] \\ g_{F7}(D) &= \frac{(3-2D)g_{F1}(D)}{109^2(7-4D)} \left[1 - \left(\frac{1}{110} \right)^{(7-4D)/2(D-1)} \right] \\ g_{F8}(D) &= \frac{D^{(2-D)/2}}{(2-D)^{(2-D)/2}} \left(\frac{1}{110} \right)^{(2-D)/2(D-1)} \end{aligned}$$

将式(28)进行无量纲化处理,可得无量纲法向接触刚度

$$\begin{aligned} K_n^* &= \frac{4(3-D)D^{(2-D)/2}(A_r^*)^{D/2}}{3 \times (2\pi)^{1/2}(1-D)(2-D)^{(2-D)/2}} \cdot \\ &\quad \left[\left(\frac{2-D}{D} \right)^{(1-D)/2} (A_r^*)^{(1-D)/2} - (a_c^*)^{(1-D)/2} \right] + \\ &\quad \frac{4 \times 110^2(3-D)D^{(2-D)/2}(A_r^*)^{D/2}}{3 \times 109^2 \times (2\pi)^{1/2}(1-D)(2-D)^{(2-D)/2}} \cdot \\ &\quad \left[1 - \left(\frac{1}{110} \right)^{-1/2} \right] (a_c^*)^{(1-D)/2} + \\ &\quad \frac{110(4-D)D^{(2-D)/2}\Phi(A_r^*)^{D/2}}{109^2 \times 2^{2-D}(2-D)^{(4-D)/2}\pi^{(D-2)/2}(G^*)^{D-1}(\ln\beta)^{1/2}} \cdot \\ &\quad \left[1 - \left(\frac{1}{110} \right)^{(2-D)/2(D-1)} \right] + \\ &\quad \frac{219D^{(2-D)/2}\Phi(A_r^*)^{D/2}}{109^2 \times 2^{3-D}(2-D)^{(2-D)/2}\pi^{(D-2)/2}(G^*)^{D-1}(\ln\beta)^{1/2}} \cdot \\ &\quad \left(\frac{D-1}{D} \ln 110 \right) - \\ &\quad \frac{(3-D)D^{(2-D)/2}\Phi(A_r^*)^{D/2}}{109^2 \times 2^{3-D}(2-D)^{(4-D)/2}\pi^{(D-2)/2}(G^*)^{D-1}(\ln\beta)^{1/2}} \cdot \\ &\quad \left[1 - \left(\frac{1}{110} \right)^{(2-D)/(D-1)} \right] - \\ &\quad \frac{8 \times 110(5-2D)D^{(2-D)/2}(A_r^*)^{D/2}}{3 \times 109^2 \times (2\pi)^{1/2}(3-2D)(2-D)^{(2-D)/2}} \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left[1 - \left(\frac{1}{110} \right)^{(3-2D)/2(D-1)} \right] (a_c^*)^{(1-D)/2} - \\ &\quad \frac{4 \times (7-3D)D^{(2-D)/2}(A_r^*)^{D/2}}{3 \times 109^2 \times (2\pi)^{1/2}(5-3D)(2-D)^{(2-D)/2}} \cdot \\ &\quad \left[1 - \left(\frac{1}{110} \right)^{(5-3D)/2(D-1)} \right] (a_c^*)^{(1-D)/2} \quad (32) \end{aligned}$$

式中: $F_n^* = \frac{F_n}{EA_n}$; $K_n^* = \frac{K_n}{E(A_n)^{1/2}}$; $A_r^* = \frac{A_r}{A_n}$; $a_c^* = \frac{a_c}{A_n}$; $G^* = \frac{G}{(A_n)^{1/2}}$; $\Phi = \frac{H}{E}$ 称为塑性指数。

式(31)和式(32)分别是粗糙表面接触的无量纲法向接触载荷和无量纲法向接触刚度分形模型,可以发现它们均是一个多变量的复杂函数。

需要说明的是:第一,文中将粗糙表面(或微凸体)的接触看作粗糙表面(或微凸体)与刚性平面的接触,所以以上公式中涉及到的粗糙表面参数(如 D 、 G 、 E 等)均为等效粗糙表面参数;第二,在通过分形理论计算粗糙表面法向接触载荷、法向接触刚度时,会出现积分结果中分母为 0 的情况,通常做法是重新给出相应的公式,而在本文中并没有给出特殊表达(如 $D=1.5$ 等),而是用统一的公式来代替,并得到了统一的无量纲法向接触刚度 K_n^* 和无量纲接触载荷 F_n^* 。因此,特别提醒在仿真分析时,要避开 $D=1.5$ (下文仿真时 D 取 1.51)、 $D=5/3$ 以及 $D=7/4$ 等值。

3 粗糙表面接触特性的仿真与分析

从式(31)和式(32)可以看出,无量纲接触载荷 F_n^* 和无量纲法向接触刚度 K_n^* 是无量纲真实接触面积 A_r^* 、分形维数 D 、无量纲分形粗糙度参数 G^* 、塑性指数 Φ 等变量的函数。通常在工程中, A_r^* 为 0~0.15, D 为 1.1~1.9, G^* 为 10^{-9} 、 10^{-10} 、 10^{-11} , Φ 为 0.7~2.5。下面,利用上述参数对式(31)和式(32)进行仿真。

从图 3 中可以看出,无论 D 为何值, K_n^* 都随 A_r^* 的增大而增大;当 $D=1.1 \sim 1.6$ 时, K_n^* 的增大呈非线性;当 $D > 1.6$ 时, K_n^* 的增大呈线性。在 D 相同时, K_n^* 随 Φ 的增大而增大。从图 4 可以看出,在 D 相同时, K_n^* 随 G^* 的减小而增大。图 5 和图 6 分别描述了 D 从 1.1 到 1.9 的变化过程中, K_n^* 随 A_r^* 的变化速度(K_n^*/A_r^*)分别与 Φ 和 G^* 的关系曲线,从中可以看出,随着 D 从 1.1 变到 1.9, (K_n^*/A_r^*) 的值变得越来越大,特别在 $D=1.7 \sim 1.9$ 时,随 Φ 的增大或者 G^* 的减小, (K_n^*/A_r^*) 的值都有明显增大。由此可见,无量纲分形粗糙度参数 G^* 和

塑性指数 Φ 对粗糙表面的无量纲法向接触刚度有较大影响。

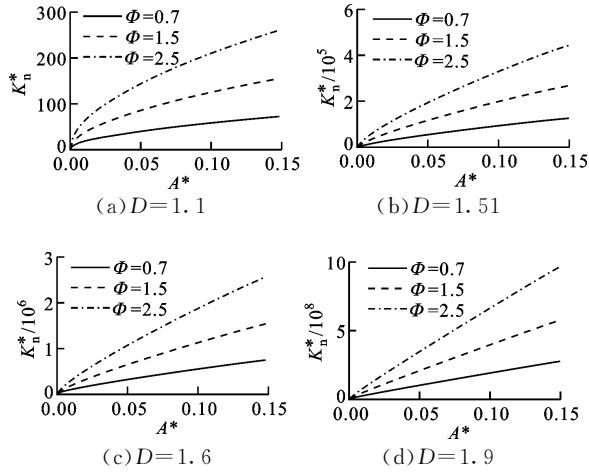


图3 A_r^* 和 Φ 对 K_n^* 的影响 ($G^* = 10^{-10}$)

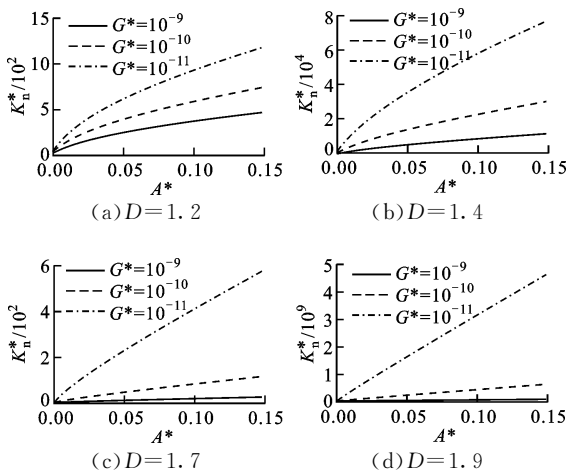


图4 A_r^* 和 G^* 对 K_n^* 的影响 ($\Phi = 1.5$)

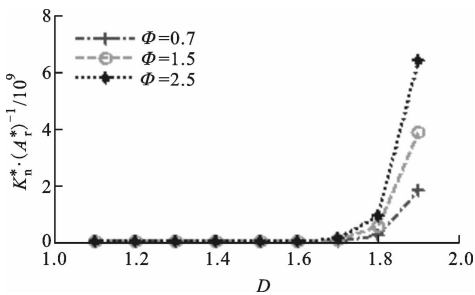


图5 D 和 Φ 对 (K_n^* / A_r^*) 的影响 ($G^* = 10^{-10}$)

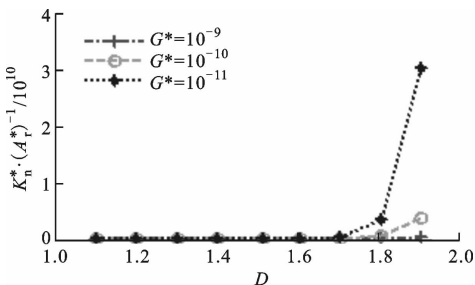


图6 D 和 G^* 对 (K_n^* / A_r^*) 的影响 ($\Phi = 1.5$)

从图7中可以看出,无论 D 为何值, F_n^* 都随 A_r^* 的增大而增大;在 $D = 1.1 \sim 1.4$ 时, F_n^* 随 A_r^* 的变化不受 Φ 的影响;在 $D = 1.51 \sim 1.9$ 时, F_n^* 随 A_r^* 的变化随着 Φ 的增大而增大;在 $D = 1.2 \sim 1.7$ 时, F_n^* 随 A_r^* 的增大呈非线性增大。从图8中可以看出,在 D 相同时,随着 G^* 的增大 F_n^* 也变大,这与 G^* 对 K_n^* 的影响规律正好相反。

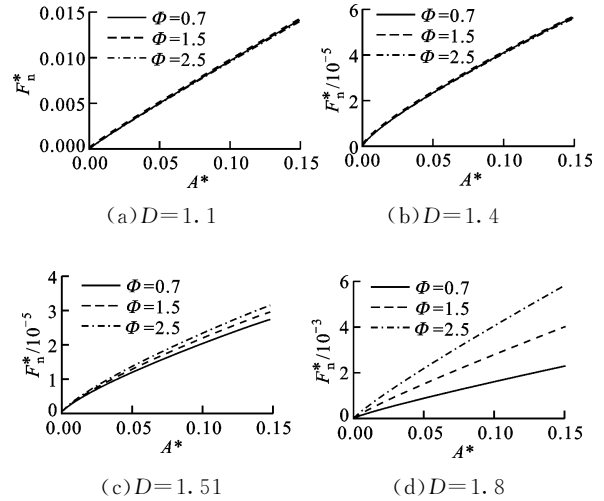
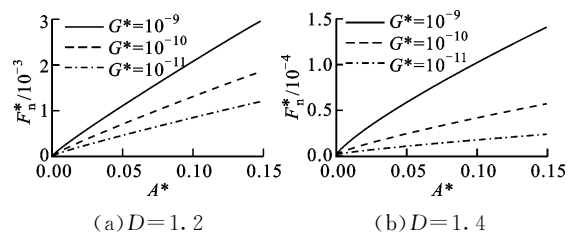
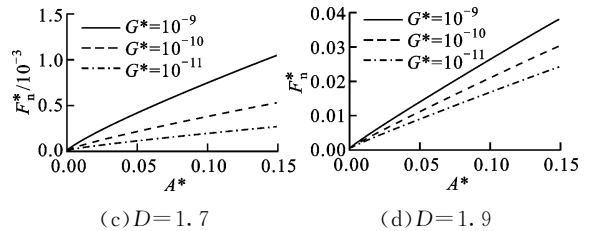


图7 A_r^* 和 Φ 对 F_n^* 的影响 ($G^* = 10^{-10}$)



(a) $D = 1.2$

(b) $D = 1.4$



(c) $D = 1.7$

(d) $D = 1.9$

图8 A_r^* 和 G^* 对 F_n^* 的影响 ($\Phi = 1.5$)

图9和图10描述了 D 、 Φ 和 G^* 三因素对 (F_n^* / A_r^*) (表示 F_n^* 随 A_r^* 的增速) 的影响,可以发现它们与图5和图6中 (K_n^* / A_r^*) 的变化有所不同。在 D 从 1.1 到 1.9 的变化过程中, (F_n^* / A_r^*) 是先减小后增大;随 Φ 的增大, (F_n^* / A_r^*) 逐渐变大,特别是当 $D = 1.6 \sim 1.9$ 时增大明显;随 G^* 的增大, (F_n^* / A_r^*) 变大 (G^* 对 (K_n^* / A_r^*) 的影响正好与此相反),但总体变化不大。

从图11和图12中可以看出,无论 D 为何值,

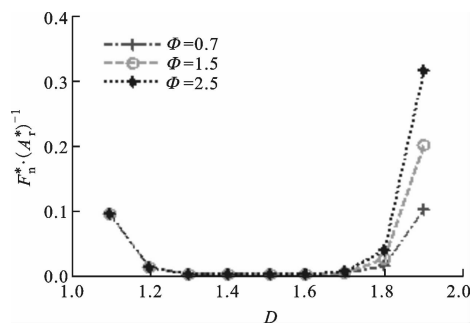


图 9 D 和 Φ 对 (F_n^*/A_r^*) 的影响 ($G^*=10^{-10}$)

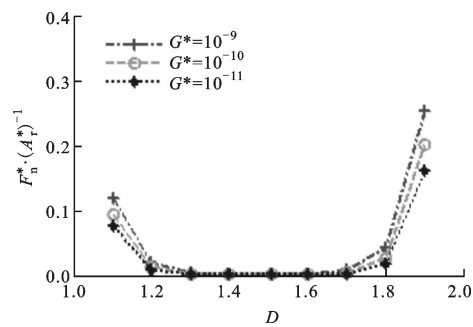


图 10 D 和 G^* 对 (F_n^*/A_r^*) 的影响 ($\Phi=1.5$)

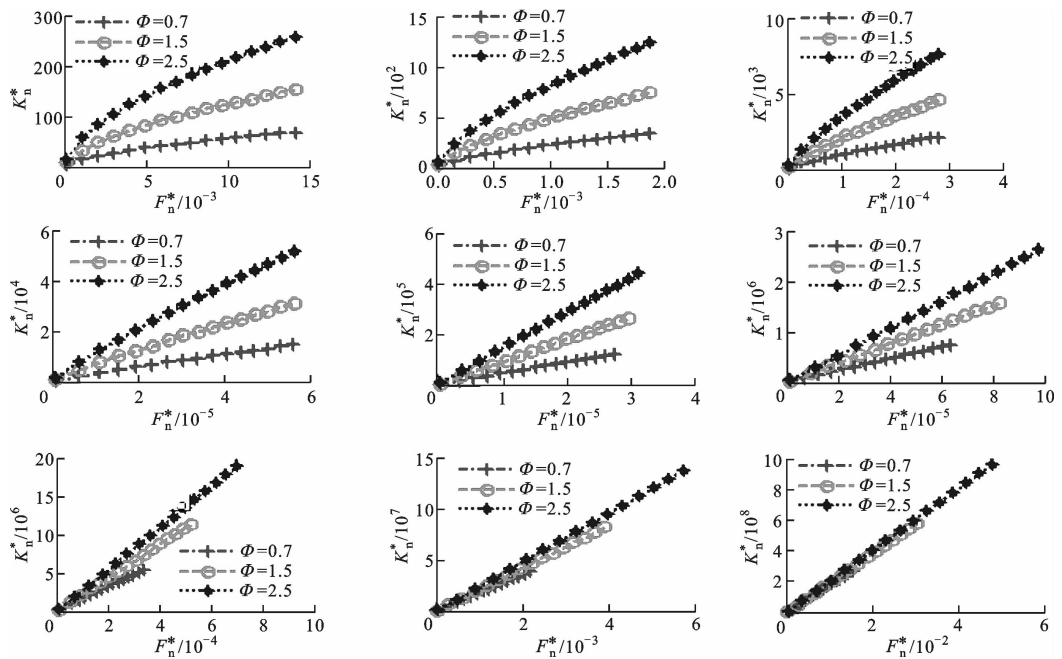


图 11 F_n^* 和 Φ 对 K_n^* 的影响 ($G^*=10^{-10}$)

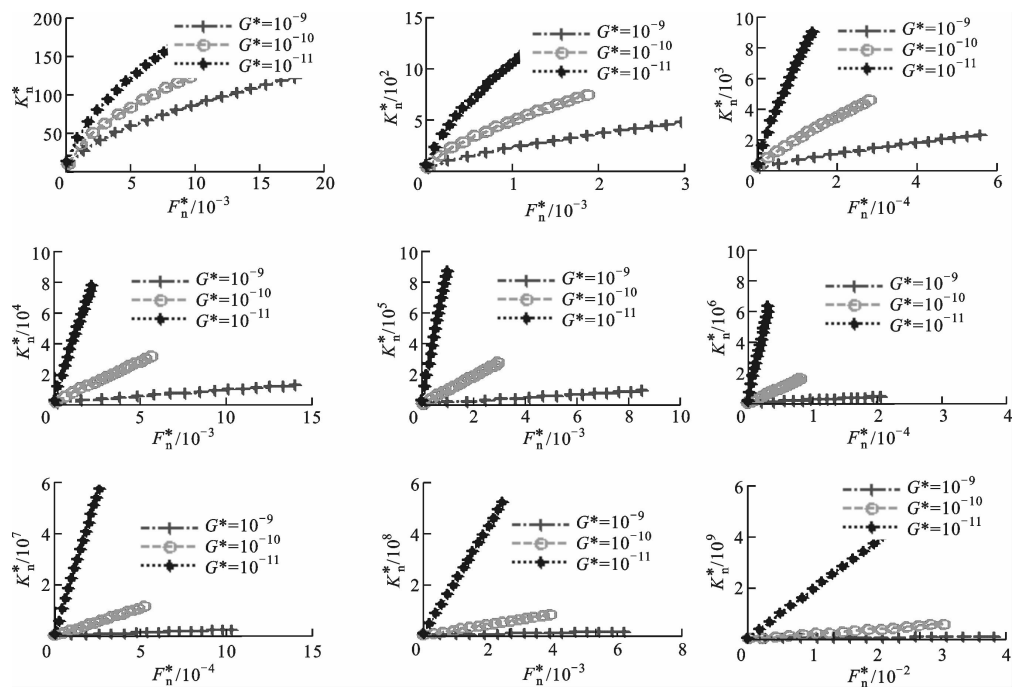


图 12 F_n^* 和 G^* 对 K_n^* 的影响 ($\Phi=1.5$)

K_n^* 都随 F_n^* 的增大而增大: 在 $D=1.1\sim 1.4$ 时, K_n^* 随 F_n^* 呈非线性增大, 而当 D 为其他值时, K_n^* 基本为线性增大。在 D 相同的情况下, 随着 Φ 的增大和 G^* 的减小, K_n^* 都随 F_n^* 的增大而增大。图 13 和图 14 描述了 D 、 Φ 和 G^* 三因素对 (K_n^*/F_n^*) 的影响, 从中可以看出, 在 D 从 1.1 到 1.9 的变化过程中, (K_n^*/F_n^*) 是先增大后减小, 在 $D=1.6\sim 1.7$ 时最大。从图 13 中可以看出, 随 Φ 的增大 (K_n^*/F_n^*) 略有增大, 在 $D=1.1\sim 1.4$ 和 $D=1.9$ 时, Φ 对 (K_n^*/F_n^*) 基本没有影响, 而在 $D=1.5\sim 1.8$ 时, Φ 增大使得 (K_n^*/F_n^*) 也变大, 但是变化幅度较小。从图 14 中可以看出, 随着 G^* 的减小, (K_n^*/F_n^*) 变化明显: 在 $D=1.1\sim 1.4$ 时, G^* 对 (K_n^*/F_n^*) 影响不大; 在 $D=1.51\sim 1.9$ 时, G^* 对 (K_n^*/F_n^*) 影响非常明显。综上所述, 在工程分析中, 当确定了分形维数 D 之后, 特别是当 $D=1.51\sim 1.9$ 时, 要特别关注 G^* 的值, 以免给 K_n^* 的分析结果带来较大误差。

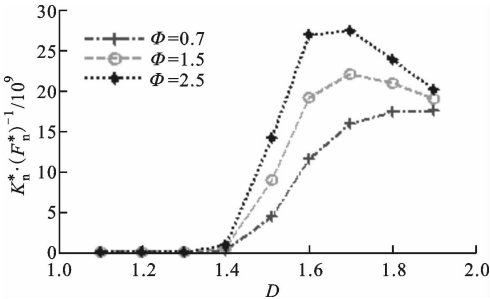


图 13 D 和 Φ 对 (K_n^*/F_n^*) 的影响 ($G^*=10^{-10}$)

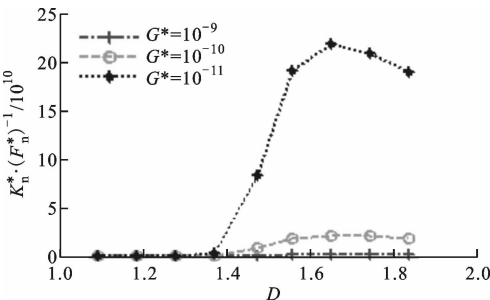


图 14 D 和 G^* 对 (K_n^*/F_n^*) 的影响 ($\Phi=1.5$)

4 粗糙表面法向接触刚度分形模型的应用及实验对比

粗糙表面接触刚度的计算准确与否与结构的固有频率有着密切的关系。利用文献[10]中所给的结合面参数, 通过有限元方法计算了哑铃模型的固有频率(螺栓预紧力矩为 $60\text{ N}\cdot\text{m}$), 并且将文献[10]中的结合面法向接触刚度用本文提出的法向接触刚度模型计算结果进行了替换, 其他有限元分析中的

设置与文献[10]相同, 最终计算出哑铃模型的前 4 阶模态, 部分振型图如图 15 所示。根据模态振型相同的比较原则, 将文献[10]和本文模型计算的固有频率与实验值进行了比较, 见表 2。从表 2 中可以看出, 本文模型计算出的第 1、2、4 阶固有频率与实验值的误差相对较小, 而第 3 阶固有频率与实验值的误差相对较大。对于机械结构而言, 低阶的固有频率相对比较重要, 对计算精度的要求也比较高, 因此可以利用本文的法向接触刚度模型来计算结构的低阶模态频率, 结果较为准确。

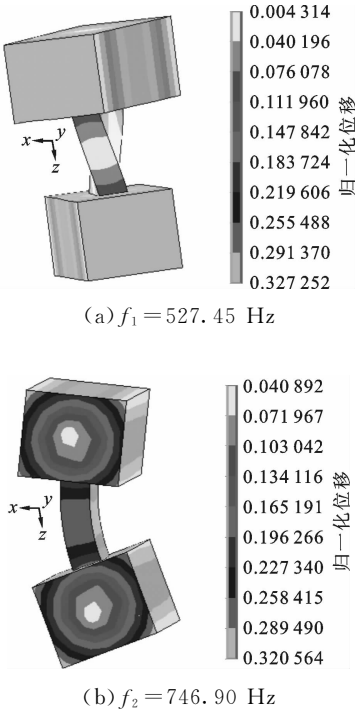


图 15 哑铃模型的计算固有频率和振型

表 2 实验固有频率和计算固有频率比较

固有频率	实验值/Hz	本文结果/Hz	本文误差/%	文献[10]结果/Hz	文献[10]误差/%
f_1	542.3	527.45	-2.7	496.6	-8.4
f_2	781.8	746.90	-4.5	733.6	-6.2
f_3	1 072.3	947.01	-11.7	1 011.3	-5.7
f_4	2 328.0	2 175.2	-6.5	2 174.7	-6.6

5 结 论

(1)在 GW 模型的基础上, 建立了一种近似一阶系统阶跃响应模式的微凸体弹塑性接触模型, 并与传统的 KE 模型、Brake 模型等做了比较, 解决了 KE 模型在弹塑性阶段是分段拟合的问题, 以及 Brake 模型和赵永武模型^[7]的平均接触压力 $P_{cp}(\delta)$

的非单调性问题,得到了微凸体接触在三阶段(弹性阶段、弹塑性阶段和塑性阶段)的平均接触压力 $P_{ep}(\delta)$ 、接触面积 $A_{ep}(\delta)$ 和接触载荷 $F_{ep}(\delta)$ 与变形量 δ 之间的关系,并且验证了它们是连续的、光滑的和单调的。

(2)在微凸体接触模型的基础上,结合接触分形理论,建立了粗糙表面法向接触刚度、法向接触载荷模型,并进行了无量纲化处理,得到了无量纲法向接触刚度 K_n^* 和无量纲法向接触载荷 F_n^* 。而且,本文建立的粗糙表面法向接触模型是解析的,可以为实际设计提供理论支持。

(3)仿真结果表明, K_n^* 和 F_n^* 都随着 A_r^* 的增大而增大;在 $D=1.1\sim 1.6$ 时, K_n^* 随 A_r^* 呈非线性增大,而在 $D=1.6\sim 1.9$ 时则呈线性增大。随 Φ 的增大或 G^* 的减小, K_n^* 与 F_n^* 随 A_r^* 变化的增速都是变大的,所不同的是, F_n^* 的增速随 D 的变化是先减小后增大,而 K_n^* 的增速是指数增大。

(4) K_n^* 随 F_n^* 的增大而增大;在 $D=1.1\sim 1.4$ 时呈非线性增大,而在 $D=1.4\sim 1.9$ 时为线性增大。在 D 从 1.1 到 1.9 的变化过程中,无论 Φ 和 G^* 取何值, K_n^* 随 F_n^* 的增速(即 K_n^*/F_n^*)都是先增大后减小。在 D 相同时, Φ 对 (K_n^*/F_n^*) 的影响不大;在 $D>1.51$ 时,随着 G^* 的减小, (K_n^*/F_n^*) 明显变大。

(5)利用本文提出的法向接触刚度模型对哑铃模型的固有频率进行了计算,并将计算结果与实验获得的固有频率进行了比较,验证了本文模型的准确性。

参考文献:

- [1] ABBOTT E J, FIRESTONE F A. Specifying surface quality: a method based on accurate measurement and comparison [J]. Mechanical Engineers, 1933, 55: 569-572.
- [2] PULLEN J, WILLIAMSON J B P. On the plastic contact of rough surfaces [J]. Proc R Soc London, 1972, 327: 159-173.
- [3] CHANG W R, ETSION I, BOGY D B. An elastic-plastic model for the contact of rough surfaces [J]. ASME Journal of Tribology, 1987, 109(2): 257-263.
- [4] ZHAO Y W, DAVID D W, CHANG L. An asperity microcontact model incorporating the transition from elastic deformation to fully plastic flow [J]. ASME Journal of Tribology, 2000, 122(1): 86-93.
- [5] KOGUT L, ETSION I. Elastic-plastic contact analysis of a sphere and rigid flat [J]. Journal of Applied Mechanics, 2002, 69: 657-662.
- [6] KOGUT L, ETSION I. A finite element based elastic-plastic model for the contact of rough surfaces [J]. Tribology Transactions, 2003, 46(3): 383-390.
- [7] 赵永武, 吕彦明, 蒋建忠. 新的粗糙表面弹塑性接触模型 [J]. 机械工程学报, 2007, 43(3): 95-101.
ZHAO Yongwu, LÜ Yanming, JIANG Jianzhong. New elastic-plastic model for the contact of rough surface [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43(3): 95-101.
- [8] BRAKE M. An analytical elastic-perfectly plastic contact model [J]. International Journal of Solids and Structures, 2012, 49(22): 3129-3141.
- [9] 徐超, 王东. 一种改进的粗糙表面法向弹塑性接触解析模型 [J]. 西安交通大学学报, 2014, 48(11): 115-121.
XU Chao, WANG Dong. An improved analytical model for normal elastic-plastic contact of rough surfaces [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2014, 48(11): 115-121.
- [10] 张学良, 陈永会, 温淑花, 等. 考虑弹塑性变形机制的结合面法向接触刚度建模 [J]. 振动工程学报, 2015, 28(1): 91-99.
ZHANG Xueliang, CHEN Yonghui, WEN Shuhua, et al. The model of normal contact stiffness of joint interfaces incorporating elastoplastic deformation mechanism [J]. Journal of Vibration Engineering, 2015, 28(1): 91-99.
- [11] GREENWOOD J A, TRIPP J H. The contact of two nominally flat rough surfaces [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1970, 185(1): 625-633.
- [12] JOHNSON K L. Contact mechanics [M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1995: 84-106.
- [13] MJUMDAR A, BHUSHAN B. Fractal model of elastic-plastic contact between rough surfaces [J]. Tribol, 1991, 113(1): 1-11.
- [14] YAN W, KOMVOPOULOS K. Contact analysis of elastic-plastic fractal surfaces [J]. J Appl Phys, 1998, 84: 3617-3624.
- [15] JIANG Shuyun, ZHENG Yunjian. A contact stiffness model of machined plane joint based on fractal theory [J]. ASME Journal of Tribology, 2010, 132(1): 1-7.

(编辑 葛赵青)